

# DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI

Def: Una matrice  $A$  è detta diagonalizzabile se e solamente se esiste una matrice diagonale  $D$ .

$A$  è diagonalizzabile  $\Leftrightarrow \exists P \in GL(n, K)$  tale che  
 $P^{-1}AP = D$   
e  $D$  diagonale.

cioè

$$\boxed{AP = PD}$$

Teorema:  $A \in K^{n,n}$  è diagonalizzabile  $\Leftrightarrow K^n$  ammette una base di autovettori.

Def: Sia  $A$  diagonalizzabile e  $P$  tale che

$$AP = PD$$

$\Rightarrow$  scrivendo  $P = [C_1 \dots C_n]$  per colonne e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ abbiamo che}$$

1) le colonne di  $P$  sono una base di  $\mathbb{K}^n$   
(perché  $\det(P) \neq 0$ )

$$2) \quad AP = [AC_1 \dots AC_n] = PD = [\lambda_1 C_1 \dots \lambda_n C_n]$$

$\Rightarrow AC_i = \lambda_i C_i \Rightarrow$  le colonne di  $P$  sono  
autovettori per  $A$ .

Vic versa: Sia  $B = (c_1 \dots c_n)$  una base di autovettori  
per  $A$ ; allora  $\exists \lambda_1 \dots \lambda_n$  tali che  $Ac_i = \lambda_i c_i$   
 $\Rightarrow$  posto  $P = [c_1 \dots c_n]$  come colonne

$$AP = [Ac_1 \dots Ac_n] = [\lambda_1 c_1 \dots \lambda_n c_n] = \\ = PD \text{ con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Oss:  $\mathbb{K}^n$  ammette una base di autovettori per  $A$   
 $\Leftrightarrow$  la somma degli autospazi di  $A$  è tutta  $\mathbb{K}^n$

$$\lambda \text{ autovettore} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$VS \in S_{\text{pec}} A: V_\lambda := \ker(A - \lambda I).$$



$\Rightarrow$  condizione necessaria affinché

$$\mathcal{R}M_{\mathcal{R} \text{Spec } A} + V_{\mathcal{R}} = 1K^n$$

$$\text{è } \sum_{\mathcal{R} \in \text{Spec } A} \dim V_{\mathcal{R}} = \sum_{\mathcal{R} \in \text{Spec } A} m_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \geq n.$$

Teorema: Si gli autospazi di  $A$  sono sempre tutti in somma diretta.

[Vuel dire che  $V_{\mathcal{R}_1} + \dots + V_{\mathcal{R}_r} \cong V_{\mathcal{R}_1} \times V_{\mathcal{R}_2} \dots V_{\mathcal{R}_r}$   
ovvero che ogni vettore dell'a somma si  
scrive in modo unico come somma di  
vettori di  $V_{\mathcal{R}_i}$  ~~ovvero~~ ~~che~~

DLH: Siano  $\mathcal{R}, \mu$  due autofunzioni di  $A$  distinte:

$$\Rightarrow V_{\mathcal{R}} \oplus V_{\mu}.$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{DLH}}: \quad \bar{x} \in V_{\mathcal{R}} \cap V_{\mu} &\Rightarrow A\bar{x} = \mathcal{R}\bar{x} = \mu\bar{x} \Rightarrow (\mathcal{R} - \mu)\bar{x} = 0 \\ &\Rightarrow \bar{x} = 0 \Rightarrow V_{\mathcal{R}} \oplus V_{\mu}. \end{aligned}$$

Ragioniamo per induzione su  $n = \text{numero di autospazi nella somma.}$

Sappriamo che valga che le somme di  $(n-1)$  autospazi <sup>distinti</sup> di  $A$  sia diretta e dimostriamo che anche la somma di  $k$  autospazi distinti di  $A$  è diretta.

•  $k=2$  : vedi sopra

•  $(k-1) \Rightarrow (k)$  consideriamo  $V_{\mathcal{R}_1} + \dots + V_{\mathcal{R}_k}$  e sappiamo che la somma non è diretta.

$\bar{w} \in V_{x_2} + V_{x_1} + \dots + V_{x_k}$  rule che

$\exists \bar{v}_2 \dots \bar{v}_k$  con  $\bar{v}_i, \bar{v}_i' \in V_{x_i}$   
 $\bar{v}_2' \dots \bar{v}_k'$

tali che

con  $(\bar{v}_2 \dots \bar{v}_k) \neq (\bar{v}_2' \dots \bar{v}_k')$

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_k = \\ &= \bar{v}_2' + \dots + \bar{v}_k'\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A\bar{w} = A(\bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_k) = A(\bar{v}_2' + \dots + \bar{v}_k') \Rightarrow$$

$$A\bar{v}_2 + \dots + A\bar{v}_k = A\bar{v}_2' + \dots + A\bar{v}_k' \Rightarrow$$

$$\alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_1 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = \alpha_2 \bar{v}_2' + \dots + \alpha_k \bar{v}_k'$$

considera ora  $\bar{w} = A\bar{w} - \alpha_2 \bar{w} =$



$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k) - (\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k) \\
 &= (\lambda_1 - \lambda_1) \bar{v}_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k) \bar{v}_k
 \end{aligned}$$

ed ognuno dei termini appartiene a  $V_{\lambda_i}$

In particolare  $(A\bar{u} - \lambda_1 \bar{u}) \in V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$   
che sono in somma diretta.

Quindi  $A\bar{u} - \lambda_1 \bar{u}$  si scrive in modo unico

$$\text{come } (\lambda_1 - \lambda_1) \bar{v}_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k) \bar{v}_k \Rightarrow$$

~~$\Rightarrow$  abbiamo che anche~~

$$\lambda_1 \bar{v}_1' + \lambda_2 \bar{v}_2' + \dots + \lambda_k \bar{v}_k' - \lambda_1 \bar{u} = \lambda_1 (\bar{v}_1 - \bar{v}_1) + (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{v}_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_1) \bar{v}_k$$

$$A \bar{w} - R_1 \bar{w} = (R_2 - R_1) \bar{v}_2 + (R_3 - R_2) \bar{v}_3 + \dots + (R_k - R_{k-1}) \bar{v}_k$$

$$A \bar{w} - R_1 \bar{w} = (R_1 - R_1) \bar{v}_1' + \dots + (R_k - R_1) \bar{v}_k' \\ = (R_2 - R_1) \bar{v}_1' + \dots + (R_k - R_1) \bar{v}_k'$$

poiché ho c. lineari di  $(k-1)$  autovettori  
 ne segue  $(R_i - R_1) \bar{v}_i = (R_i - R_1) \bar{v}_i'$   
 con  $R_i \neq R_1 \Rightarrow \bar{v}_i = \bar{v}_i' \quad i \geq 2$

Ne segue

$$\bar{w} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_k = \\ = \bar{v}_1' + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_k \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_1' \text{ ug}$$

perché avevo supposto che  $\bar{w}$  si scriveva in 2  
 modi diversi



$$\Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}.$$

□

CONSEQUENZA

$$\dim \bigoplus V_{\lambda} = \sum \dim V_{\lambda}.$$

$$\text{In particolare } \bigoplus V_{\lambda} = K^n \Leftrightarrow \sum \dim V_{\lambda} = n$$

$$\Leftrightarrow \sum m_{\lambda}(\lambda) = n.$$

Una matrice  $A \in K^{n,n}$  è diagonalizzabile

$$\Leftrightarrow \left[ \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_{\lambda}(\lambda) = n \right]$$

→ per provare una matrice diagonalizzabile, si calcolano le basi degli autospazi e le  $n$  mette in colonna.

Teorema: Sia  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ .

Allora,  $\forall \lambda \in \text{Spec}(A)$

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

oss: • Se  $\sum m_a(\lambda) < n \Rightarrow A$  non è diagonalizzabile.

Se  $\sum m_a(\lambda) = n \Rightarrow A$  è diagonalizzabile

DLM. Siccome  $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$

$$\text{rk}(A - \lambda I) < n \Rightarrow \dim V_\lambda = \dim$$

$$\text{Ker}(A) \geq 1.$$

$$\Rightarrow m_g(\lambda) \geq 1.$$

mostriamo che  $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$ .

Sia  $V_{\lambda^t} = \text{Ker}(A - \lambda I^t)$  e siano

$(\bar{V}_1 \dots \bar{V}_t)$  una sua base (di autovettori;  $t = m_g(\lambda)$ ).

$\Leftrightarrow$

$$m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$$

$$\forall \lambda \in \text{Spec}(A).$$

$\Leftrightarrow$

$$m_a(\lambda) = n - \text{rk}(A - \lambda I)$$

$$\forall \lambda \in \text{Spec}(A).$$

completiamo  $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t)$  a base di  $V_n(k)$  aggiungendo  $n-t$  vettori e noi

$P = [v_1 \ v_2 \dots v_t \ w_1 \dots w_{n-t}]$  la matrice che ha per colonne tali vettori.

$$AP = [Av_1 \ Av_2 \dots Av_t \ Aw_1 \dots Aw_{n-t}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_1 v_2 & \dots & \lambda_1 v_t & x_1 & \dots & x_{n-t} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ \hline & & & s & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_{n-t} \end{bmatrix}$$

$\uparrow$   
 $\lambda_1 \dots \lambda_t$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{matrice}}$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \left[ \begin{array}{c|c} \lambda_1 I & S \\ \hline 0 & T \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det \left[ \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 I & S \\ \hline 0 & T \end{array} \right) - \lambda I \right] =$$



$$= \det \left[ \begin{array}{c|c} (S_2 - S)I_k & 0 \\ \hline 0 & T - S I_{n-k} \end{array} \right] = (S_2 - S)^k \det(T - S I_{n-k}).$$

e questo polinomio ha  $S_1$  come radice con molteplicità algebrica almeno  $k = m_g(S_1)$

$$\Rightarrow m_g(S_2) \leq m_a(S_1) \quad \square$$

Più avanti:

A non è diagonalizzabile se

$$1) \sum m_a(S) < n \quad \text{oppure}$$

$$2) \sum m_a(S) = n \quad \exists S_i : m_g(S_i) < m_a(S_i).$$

Oss: Il problema 1. è risolvibile ampliando il campo su cui si lavora.

Teorema: Sia  $K$  un campo. Allora esiste un campo  $\bar{K}$  tale che  $K \subseteq \bar{K}$  e ogni polinomio a coeff. in  $K$  ~~ha~~ ammette almeno una radice e  $\bar{K}$  è minimale rispetto tale proprietà.  $\bar{K}$  è detto chiusura algebrica di  $K$ .

Oss: In  $\bar{K}$  ogni polinomio in  $x$  di grado  $n$  ha sempre  $n$  radici (non necessariamente distinte).

Dati: Sia  $p(x) \in \overline{\mathbb{K}}[x] \Rightarrow$  poiché  $\overline{\mathbb{K}}$  alg. chiuso  
 $x \deg p(x) \geq 1 \quad \exists \xi \in \overline{\mathbb{K}}$  tale che  $p(\xi) = 0$   
 $\Rightarrow p(x) = (x - \xi) g(x)$  con  $\deg g(x) = \deg p(x) - 1$ .  
 Se  $\deg g(x) = 0 \Rightarrow$  FINE; altrimenti per induzione  
 $g(x)$  ha almeno  $\deg p(x) - 1$  radici in  $\overline{\mathbb{K}} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow p(x)$  ha  $(n-1) + 1 = n$  radici in  $\overline{\mathbb{K}}$  e  
 $n = \deg p(x)$ .  $\square$

Sia  $\mathbb{R}$  il campo reale. Consideriamo l'ovettoriale  
 generato dalle due matrici  $11 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $i := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .



$$\mathbb{C} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{1}, i)$$

$$a\mathbb{1} + b \cdot i =$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\det(a\mathbb{1} + bi) = a^2 + b^2 \stackrel{=0}{\Leftrightarrow} a = b = 0.$$

ogni elemento diverso da  $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  in  $\mathbb{C}$  è invertibile!

oss: Il prodotto di 2 elementi di  $\mathbb{C}$  è un elemento di  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & ac - bd \end{bmatrix}$$

$(\mathbb{C}, \{0, 1, \cdot\})$  è un gruppo commutativo  
+ vale la prop. distributiva della somma di  
matrici rispetto al prodotto  $\Rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$   
è un campo.

possiamo identificare  $\mathbb{R}$  con il sottoinsieme di  
 $\mathbb{C}$  generato da  $1$ .  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

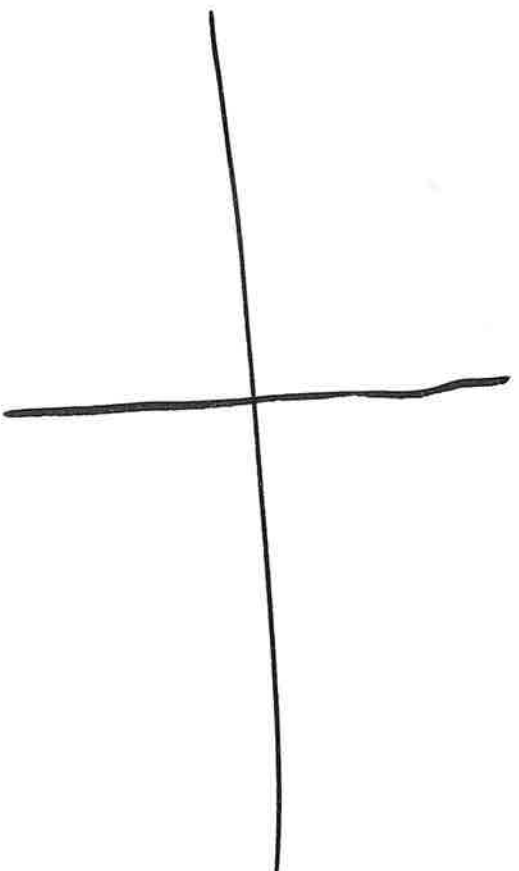
$$\begin{aligned} z \in \mathbb{C} \quad z &= a \cdot 1 + b \cdot i = \\ &= a + b \cdot i \end{aligned}$$

$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -1 \cdot 1 = -1$$

Teorema fondamentale dell'algebra: Il campo  $\mathbb{C}$  è la chiusura  
algebraica di  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow \mathbb{C}$  è algebricamente chiuso.

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$



dato  $a+ib \in \mathbb{C}^*$  il suo inverso è dato da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\frac{(a-ib)}{a^2+b^2}.$$



Definiamo  $\forall z = a \cdot 1 + ib \in \mathbb{C}$

$$\bar{z} = {}^t z = a \cdot 1 - ib$$

oss: ~~se~~  $\overline{(a+ib)} = \bar{a} + \bar{b}$   $a, b \in \mathbb{C}$

$$\overline{(a \cdot b)} = \bar{b} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$z \cdot \bar{z} = (a \cdot 1 + ib)(a \cdot 1 - ib) = (a^2 + b^2) \cdot 1.$$

$$\text{Definiamo } |z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x \quad z \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2} = |a|$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

oss:  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$   $a+ib = a-ib \Leftrightarrow b=0$

oss: Sia  $p(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$

$$\overline{p(z)} = \overline{p(\bar{z})} = p(\bar{z})$$

$$\Rightarrow \text{se } p(z) = 0 \Rightarrow \overline{p(z)} = 0 \Rightarrow p(\bar{z}) = 0$$

Se  $z$  è radice di  $p(x) \Rightarrow \bar{z}$  è radice di  $p(x)$ . Se  $\bar{z} \neq z \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-z)(x-\bar{z}) \text{ divide } p(x)$$

$$\Rightarrow (x^2 - (\bar{z}+z)x + z\bar{z}) \text{ divide } p(x).$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$z = a + bi$$

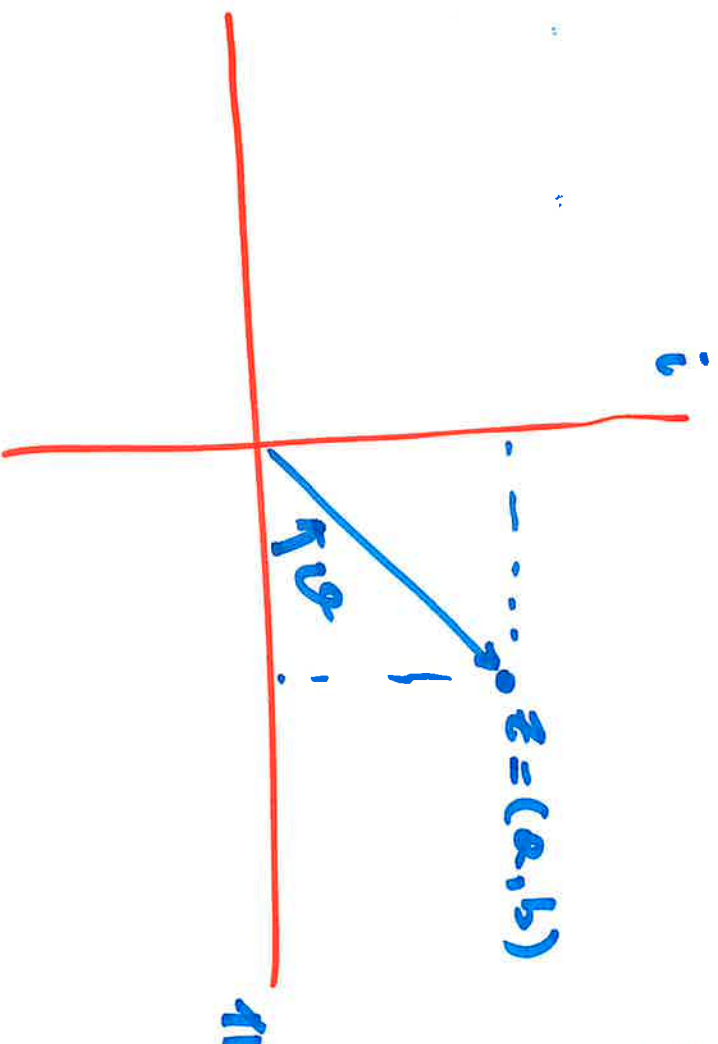
$$\bar{z} + z = a + ib + a - ib = 2a$$

Un polinomio  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  si fattorizza sempre in termini di grado al più 2 su  $\mathbb{R}$ .

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

proj. scalar  
std. in  $\mathbb{R}^2$

$$|z| = \|(a, b)\|$$



$$(a, b) \cdot (c, d) =$$

$$= ac + bd.$$

$$11 \cdot 11 = 1$$

$$11 \cdot i = 0$$

$$i \cdot i = -1$$

$$\cos \theta = \frac{(a, b) \cdot (1, 0)}{a^2 + b^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

$$a = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$$

$$b = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) (-i).$$



In  $\mathbb{R}$  abbiamo la funzione

$$\exp: x \mapsto e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

~~ma~~  $a \rightarrow a^n \quad n \in \mathbb{Z}$

$$a \rightarrow a^{\frac{1}{n}} \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

~~ma~~  $a \rightarrow a^{\frac{m}{n}} \quad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

per definire  $\exp$  se si passa dalla sua  
espressione in serie.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(ib) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ib)^n}{n!} =$$

$$\text{b'n pari} \Rightarrow (i)^n = (-1)^{n/2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ib)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ib)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= (-1)^{n/2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \cos b + i \sin b.$$

Consequenza

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$[e^{i\pi} + 1 = 0]$$